Maryan Smoluchowski

O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z niemi objawach cieplnych.

W Krakowie.
Nakładem Akademii Umiejętności.
Skład główny w Księgarni Spółki Wydawniczej Polskiej
1903.

NOWSZE WYDAWNICTWA

AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI

WYDZIAŁU MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZEGO.

Pamiętnik Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Tom XVIII. 4°. str. 243, z 27. tablicami i licznemi rycinami w tekscie. Cena 5 złr.

Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Serya II. tom X, ogólnego zbioru tom XXX, 1896, w 8° dużej, str. 403, z 12 tablicami i 22 rycinami w tekscie. Cena 6 złr.

E. Bandrowski: O utlenieniu parafenilenodwuaminu, lex. 8° str. 13. Cena 20 ct.

— O świeceniu podczas krystalizacyi, lex. 8-o. str. 8. Cena 10 ct.

A. Beck: O zmianach ciśnienia krwi w żyłach. lex. 8°. str. 40, z 20 rycinami w tekscie. Cena 70 ct.

— Pomiary pobudliwości różnych miejsc nerwu za pomocą rozbrojeń kondensatora. lex. 8-o, str. 13. Cena 20 ct.

A. Beck i N. Cybulski: Dalsze badania zjawisk elektrycznych w korze mózgowej, lex. 8-o, str. 84, z tablicą i 17 rycinami w tekscie. Cena 1 złr.

L. Birkenmajer: Marcin Bylica z Olkusza oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu w roku 1493, z 12 rycinami w tekscie lex. 8° str. 163. Cena 1 fl. 50 ct.

— Wyznaczenie długości wahadła sekundowego w Krakowie, oraz dwóch innych miejscowościach W. Księstwa Krakowskiego, lex. 8-o, str. 68. Cena 80 ct.

— O wpływie temperatury na ruch zegarów, a zwłaszcza chronometrów, lex. 8-o, str. 36. Cena 50 ct.

Cybulski i Zanietowski: Dalsze doświadczenia z kondensatorami: Zależność pobudzenia nerwów od energii rozbrojenia. lex. 8° str. 5. Cena 10 ct.

B. Dębski: O budowie i mechanizmie ruchów liści u marantowatych. lex. 8-o, str. 109, z dwiema tablicami. Cena 1 złr. 25 ct.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności Serya III, Tom 1, Dział A.

Treść zeszytu I.

St. Tołłoczko: Studya doświadczalne nad kryoskopijnemi własnościami nieorganicznych rozczynników (z 2-ma rycinami) (str. 1—39). — L. Bruner: Studya dynamiczne nad bromowaniem ciał aromatycznych (str. 40—95). — M. P. Rudzki: O wieku ziemi (str. 96).

Treść zeszytu II.

M. P. Rudzki: O wieku ziemi (c. d., str. 97—133). — L. Birkenmajer: Marco Beneventano, Kopernik, Wapowski, a najstarsza karta geograficzna Polski (z 2-ma ryc. i jedną mapą) (str. 134—222). — Wł. Natanson: O prawach tarcia wewnętrznego (str. 223—240).

Treść zeszytu III.

S. Zaremba: O tak zwanych funkcyach zasadniczych w teoryi równań fizyki matematycznej (str. 241—275). — St. Kępiński: O całkach rozwiązań równań różniczkowych, z sobą sprzężonych, rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe (ciąg dalszy) (str. 276—288). — J. Siemiradzki: O wieku wapieni skalistych w paśmie krakowsko-wieluńskiem (str. 289—296). — L. Marchlewski i J. Sosnowski: Synteza nowego układu czteropierścieniowego. Kumarofenazyn i pochodne (str. 297—305). — Wł. Natanson: O podwójnem załamaniu światła w cieczach odkształcanych (str. 306—316). — M. Nencki i J. Zaleski: O produktach odtlenienia heminy zapomocą jodowodoru i jodku fosfonu oraz o budowie heminy i jej pochodnych (str. 317—320) (c. d. w zeszycie IV).

Maryan Smoluchowski

O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z niemi objawach cieplnych.

W Krakowie.
Nakładem Akademii Umiejętności.
Skład główny w Księgarni Spółki Wydawniczej Polskiej
1903.

Osobne odbicie z T. XLIII. Serya A. Rozpraw Wydziału matematyczno-przyrodniczego
Akademii Umiejętności w Krakowie.

KRAKÓW. — DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
pod zarządem Józefa Filipowskiego.

O zjawiskach aerodynamicznych i połączonych z niemi objawach cieplnych

przez

Maryana Smoluchowskiego.

Wniesiono na posiedz. Wydz. mat.-przyr. z d. 9 marca 1903 r.; ref. czł. Natanson.

I. Równania zasadnicze aerodynamiki.

§ 1. W rozwoju swym aeromechanika znacznie pozostała w tyle za hydrodynamiką, która od czasów klasycznych badań Stokesa, Kelvina i Helmholtza tak znakomicie postąpiła głównie dzięki współudziałowi licznych angielskich badaczy (Rayleigh, Lamb, Love, Hicks, Reynolds. Thomson i inni).

Z wyjątkiem akustyki, ledwie kilka szczególnych przypadków (transpiracya przez rurki Poiseuillea, wypływ przez otwór w cienkiej blaszce, opór ciał poruszających się w gazie, krążki wahające się Maxwella i Meyera) zostało rozwiązanych z pewnem, czasem bardzo nie wystarczającem, przybliżeniem; nie znamy żadnego prawa ogólnego, żadnego rozwiązania ścisłego, a najważniejsze zagadnienia są zaledwie poruszone; co najwidoczniej występuje w zastosowaniach do meteorologii i aeronautyki pozostających dlatego wciąż jeszcze w stadyum empiryzmu chaotycznego.

Pochodzi to stąd, że gazów nie można, według zwyczaju hydrodynamiki, uważać za płyny nieściśliwe, a zwłaszcza że ściśliwość, określona przez prawo Boyle-Charlesa od nowej zmiennej zależy: od temperatury, której zmiany odgrywają rolę równie ważną jak różnice ciśnienia. Do równań hydrodynamicznych trzeba

zatem dla gazów dodać równanie termodynamiczne; a komplikacya zagadnienia na tem polega, że zwykle nie można oddzielić tej strony cieplnej badania od strony mechanicznej.

W dawniejszych badaniach przyjmowano układ isotermiczny lub adiabatyczny bez ścisłego uzasadnienia, lub zadawalając się przypuszczeniem, że rzeczywistość leżeć będzie między temi, czasem bardzo oddalonemi ostatecznościami[1]). Dopiero w roku 1894 pojawia się w ścisłej formie owo równanie termiczne[2]), na którem opierać się powinny dotyczące rozumowania i które powinno służyć jako podstawa do systematycznego wywodu aerodynamiki.

Ponieważ się jednak zdaje, że to równanie dotychczas wcale w ten sposób wyzyskane nie zostało[3]), zamierzamy podać w niniejszej pracy przyczynek do tego rodzaju badań.

§ 2. Przypuśćmy, że wywodzimy równania cieczy lepkich według pomysłu Stokesa bez hipotez molekularnych, opierając[4]) się tylko na przypuszczeniu, że siły lepkości proporcyonalne są do prędkości odkształcenia elementarnego; ściśle biorąc wymagają one pewnych poprawek dla gazów o nierównomiernym rozkładzie temperatury, ponieważ zależnie od niej zmienia się spółczynnik lepkości. Istotnie nie możnaby tego wpływu zaniedbać, gdyby chodziło np. o ruchy oceanu atmosferycznego ziemi, gdzie w górnych warstwach bardzo nizka panować musi temperatura[5]).

Zwykłe równania, wypływające z podstawienia wyrażeń:

$$(1) \qquad p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \text{ itp.}$$

---

[1]) Tak znajdujemy izotermiczną teoryę efuzyi przez mały otwór w dziełach: Duhamela, Wüllnera, Moussona, Langa; adiabatyczną (według St. Venant'a i Wantzel'a) u Weissbacha, Zeunera, Lamba; obydwie teorye u Winkelmanna, Chwolsona i t. p.

[2]) Wywiedzione prawie równocześnie dla gazu jednoatomowego przez Kirchoffa z teoryi Maxwella, przez Natansona na podstawie rozważań kinematycznych, a przez Neumanna ogólnie na podstawie termodynamiki; patrz Natanson Rozpr. XLII (A) str. 76 (1902).

[3]) Podałem pewne zastosowania w rozpr. „O atmosferze ziemi i planet" [Księga pamiątkowa Uniwersyt. Lwów 1900, także Physik. Zeitschr. 2., str. 307. (1901)].

[4]) Według metody Lamba [Hydrodynamics p. 509].

[5]) Smoluchowski „O atmosf. i t. d. loc. cit.

w równania formy

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \tag{2}$$

przyjęłyby wtedy kształt analogiczny do:

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\Delta^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \tag{3}$$

$$+ \frac{\partial \mu}{\partial x} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right].$$

Jeżeli jednak jak w zwykłych zastosowaniach, różnice temperatury nie są znaczne, wtedy można pominąć wyrażenia drugiego wiersza — co też z małymi wyjątkami uczynimy w następujących rozważaniach.

W równaniu owem p oznacza średnią wartość ciśnień normalnych w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach:

$$p = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}). \tag{4}$$

Nie wynika z tego jeszcze, że p jest identyczne z ciśnieniem p w prawie Boyle-Charlesa; jest to jednak hipotezą bardzo prawdopodobną i prawie ogólnie przyjętą przez nowszych autorów. Można to samo założenie wyrazić także w odmiennej formie, mianowicie: gdybyśmy byli przyjęli prawo Boyle-Charlesa zamiast równania (4) za definicyę wielkości p, wynikłoby równanie

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u + \nu \frac{\partial \operatorname{div}}{\partial x} \tag{5}$$

$\left[\text{gdzie symbol div jest skróceniem na } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]$ i założenie Stokesa należałoby wysłowić w tej formie: że spółczynnik tarcia ν zmian objętości jest trzecią częścią spółczynnika μ odkształceń postaciowych [1]).

Tę hipotezę przyjmiemy także tutaj, polegając na tem, że kinetyczna teorya według Maxwella [2]) daje ten sam rezultat, ale zaznaczamy, że bardzo pożądanem byłoby ostateczne zbadanie doświadczalne tej kwestyi, nie podzielamy bowiem bynajmniej zdania

[1]) Patrz: Natanson Rozpr. Akad. Um. XLI p. 238.

[2]) Scientific Papers II. p. 69. (1880).

O. E. Meyera[1]), że to jest rzecz obojętna, gdyż lepkość objętościowa superponuje się ponad ciśnienie i od niego odróżnioną być nie może.

Poznamy dalej przykłady (§ 24., § 25.), które wykazują błędność tego mniemania, a możnaby jeszcze oprócz nich przytoczyć n. p. zanikanie fal głosowych wskutek lepkości, do którego także przyczynia się owa lepkość „objętościowa".

§ 3. Najprostszy sposób otrzymania podstawowego równania termicznego polega na zastosowaniu zasady energii do poruszającego się elementu masy gazu $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$.

Energia całkowita tegoż elementu, składająca się z energii cieplnej, kinetycznej i potencyalnej (względem sił zewnętrznych), musi się powiększyć w miarę pracy, wykonanej przez natężenia działające na powierzchnię i ilości ciepła, które napłynęło wskutek przewodzenia.

Związek ten jest wyrażony przez równanie:

$$(6)\qquad \frac{D}{Dt}\left[\frac{c}{A}\,\theta + \frac{u^2+v^2+w^2}{2} + U\right]dm = \left[\frac{\partial}{\partial x}(up_{xx}+vp_{xy}+wp_{xz}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(up_{xy}+vp_{yy}+wp_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(up_{xz}+vp_{yz}+wp_{zz}) + \varkappa\Delta^2\theta\right] dx\,dy\,dz,$$

które przez wykonanie operacyj różniczkowych i przez wprowadzenie wartości (1) tudzież uwzględnienie równań dynamicznych (3) przechodzi w:

$$(7)\qquad \frac{c_v}{A}\,\varrho\,\frac{D\theta}{Dt} + p\,\mathrm{div} = \Phi + \varkappa\Delta^2\theta,$$

gdzie Φ przedstawia ciepło powstające (w 1 cm^3 podczas 1 sec.) wskutek tarcia wewnętrznego, t. j. tak zwaną funkcyę dysypacyjną:

$$(8)\qquad \Phi = -\tfrac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}^2 + \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

Można zresztą wywód uczynić ściślejszym, wyrażając powyższą relacyę energetyczną dla skończonej ilości gazu, zamieniając

[1]) Gastheorie p. 114 Crelle Journal 75. p. 337. (1873). Meyer opierając się na zasadach teoryi kinetycznej gazów (według Maxwell-Clausius'a) znajduje $\nu = 2\mu$, ale wynik ten jest bez wartości, gdyż odnośne obliczenie jest błędne (porównaj Boltzmann Gastheorie I. p. 93.) (1895).

całkę powierzchowną na objętościową i zastosowując wynik do pojedynczych elementów [1]).

§ 4. Trzeba jednak zauważyć, że to równanie, tak samo jak równania dynamiczne (3), nie będzie zupełnie ścisłe, ponieważ nie można przypuszczać, ażeby tarcie wewnętrzne i przewodzenie ciepła były zjawiskami całkiem niezależnemi od siebie.

Wszak możnaby nawet wątpić, czy jakieśbądź zjawiska fizyczne równoczesne i na tem samem miejscu się odbywające mogą być w ścisłem znaczeniu słowa od siebie niezależne.

Istotnie w naszym przypadku Natanson [2]) pokazał, że według teoryi kinematycznej przewodzenie ciepła w gazie będącym w ruchu, w trochę odmienny sposób odbywać się musi, aniżeli w gazie nieruchomym — ale różnica w zwykłych warunkach będzie nieznaczna i zapewne nie łatwo da się wykazać doświadczalnie. Ograniczymy się zatem do przybliżenia, które można osięgnąć przez przyjęcie tej zasady „superpozycyi“ lub „niezależności“ zjawisk lepkości, przewodnictwa cieplnego i t. d., nie wchodząc w rozważanie owych kwestyj. Tak samo pomijamy zboczenia od prawa Boyle-Charlesa, przyjmując ścisłość formuły

$$\frac{p}{\varrho} = R\,\theta. \tag{9}$$

§ 5. Równania zasadnicze aerodynamiki będą zatem, oprócz tejże formułki (9) następujące:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{x} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial\,\mathrm{div}}{\partial x} + \mu\,\Delta^2 u \\
\varrho\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{y} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial\,\mathrm{div}}{\partial y} + \mu\,\Delta^2 v \\
\varrho\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial\,\mathrm{div}}{\partial z} + \mu\,\Delta^2 w
\end{aligned}\right| \tag{10}$$

równanie ciągłości:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

i równanie termiczne (7), które za wprowadzeniem relacyi

---

[1]) Smoluchowski „O atmosferze“ etc. loc. cit.

[2]) Rozprawy Ak. Um. XLII (A) str. 70 (1902).

$$\frac{c}{A} = \frac{R}{k-1}$$

i uwzględnieniem równań (9) i (11) przyjmuje kształt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} + kp\,\mathrm{div} = (k-1)[\Phi + \varkappa \Delta^2 \theta], \tag{12}$$

gdzie symbol Φ jest skróceniem wyrażenia (8).

Zaznaczymy zaraz na tem miejscu, że z ostatniego równania wypływa zwykłe równanie „adiabatyczne“

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^k$$

przez wprowadzenie równania (11), jeżeli prawą jego stronę można pominąć w porównaniu z lewą stroną. Wyrażenia z lewej strony przedstawiają zatem reakcyę cieplną ściśnienia lub rozprężenia adiabatycznego.

Ażeby określić specyalny problemat, trzeba określić warunki graniczne, t. j. wartości u, v, w, p, θ na powierzchni, a także stan początkowy układu zależnego od czasu.

W zwykłych zastosowaniach gaz zawarty będzie wśród ścian stałych, o temperaturze przybliżenie jednostajnej [1]), na których u, v, w trzeba przyjąć równe zero, według doświadczeń, które wykazały zupełne przyleganie warstw powierzchownych do ścian.

W razie ruchu statecznego wynika z równania (11) dla tych powierzchni: $\mathrm{div} = 0$ zatem, obierając kierunek normalnej za oś Z i oznaczając prędkość w tymże kierunku znakiem v_n:

$$\frac{\partial v_n}{\partial \zeta} = 0$$

to znaczy, że kierunek linij prądu w warstwach powierzchownych równoległy jest do ścian.

Nazywając prędkość w tymże kierunku V, widzimy, że równanie (12) daje dla powierzchni:

$$\Phi = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = -\varkappa \Delta^2 \theta. \tag{13}$$

---

[1]) Nierówności temperatury ścian dałyby powód do powstania prądów konwekcyjnych porów. Oberbeck [Wiedem. Ann. 7. p. 271. (1876)], Lorenz [Wiedem. Ann. 13. p. 582. (1881)].

Przy ścianach więc znika wpływ termiczny rozprężania lub ściśnięcia, a przeważną rolę odgrywa produkcya ciepła przez tarcie, która równoważoną być musi przez przewodnictwo gazu. W gazie, w którym spółczynnik przewodnictwa $\varkappa$ byłby zerem, ruch stały byłby wogóle niemożliwy, bo powierzchowne warstwy musiałyby się bez końca rozgrzewać. Wypływa stąd, że nie można uważać lepkości i przewodnictwa cieplnego wogóle jako czynników drugorzędnych.

II. Twierdzenia ogólne o symetryi i podobieństwie dynamicznem.

§ 6. Przyjmując siły zewnętrzne równe zeru, zauważymy, że równania zwykłej hydrodynamiki pozostają niezmienione, jeżeli się podstawi $-u, -v, -w, -p$ na miejsce u, v, w, p, pod warunkiem, że ruch jest „spokojny“ [1], t. j. że pominąć można wyrażenie kwadratowe prędkości (zatem $\frac{D}{Dt}$ zastąpić przez $\frac{\partial}{\partial t}$). To znaczy, że spokojne ruchy cieczy są w pewnym sensie „odwracalne“; zmieniając znak wszystkich różnic ciśnienia otrzyma się ruch zupełnie podobny, charakteryzowany przez te same linie prądu i te same prędkości, ale zwrócone w kierunku przeciwnym.

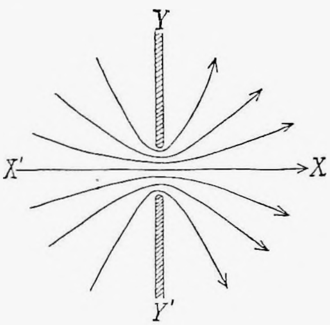
Odwracalny jest także ruch „rozpędowy“, przedmiot hydrodynamiki klasycznej, „idealnej“, polegający na uwzględnieniu bezwładności a pominięciu zupełnem lepkości; tylko że ciśnienie przy tem, jako zależne od kwadratu prędkości, nie zostaje odwróconem. Natomiast równania zupełne, uwzględniające oba czynniki, odpowiadające ruchom „gwałtownym“ nie dopuszczają takiego odwrócenia.

Wnioskujemy z tego także: jeżeli ciecz wypływa przez otwór w ścianie, symetryczny względem płaszczyzny YZ, przełożonej przez ścianę, wtedy linie prądu będą także symetryczne względem tejże płaszczyzny, dopóki ruch jest „spokojny“ (Ryc. 1). Gdy różnica ciśnienia tak dalece się powiększy, że ruch stanie się „gwałtownym“, wtedy zatraci się symetrya, co tłómaczy n. p. dążność cieczy do tworzenia promieni i wirów w takich przypadkach (Ryc. 2).

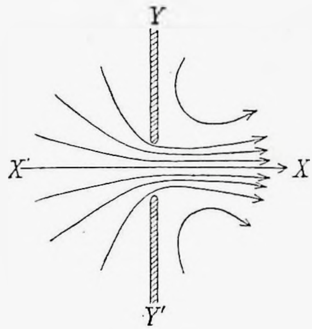
---

[1]) Uważam to wyrażenie za trafniejsze aniżeli „powolny“, ponieważ nawet najszybsze ruchy do tej kategoryi należeć będą, jeżeli gęstość będzie odpowiednio mała.

Wprawdzie Helmholtz[1]) uważał za konieczną hipotezę powstawania powierzchni nieciągłości (Discontinuitätsflächen) do wytłómaczenia zjawisk promieni, sądzę jednak, że właśnie omawiana asymetrya zupełnie do tego wystarczy: przedmiot, któremu osobną



Ryc. 1.



Ryc. 2.

pracę poświęcić zamierzamy, wraz z argumentami doświadczalnymi i teoretycznymi, które za tą teoryą przemawiają.

W aerodynamice także bezwzględna wartość ciśnienia wchodzi w rachubę, mianowicie w równaniach (9) i (12), które zatem oczywiście nie mogą być odwrócone. Tem powszechniejsze jest tutaj zjawisko asymetryi, wspomnimy tylko n. p. o promieniu[2]) gazu wypływającego pod znacznem ciśnieniem, o tworzeniu pierścieni wirowych z dymu (według Taita) o ruchach asymetrycznych i wirach w otoczeniu ciała wyrzuconego z znaczną prędkością (Mach).

Tylko dla ruchów bardzo spokojnych, połączonych z małemi różnicami ciśnienia, istnieć będzie przybliżona symetrya. [Np. § 28].

§ 7. Wielkiej doniosłości w praktycznem zastosowaniu do rozmaitych zagadnień jest zasada tak zwanego podobieństwa dynamicznego, używana np. przez Helmholtza[3]) w hydrodynamice zwykłej.

[Po ukończeniu pracy niniejszej spostrzegłem dopiero, że Helmholtz na innem miejscu[4]) rozszerzył swe badania w celu objęcia

---

[1]) „Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen“. Berl. Akad. Ber. 1868 p. 215; Ges. Abh. I. p. 146.

[2]) Patrz § 9, 5.

[3]) Studien über elektr. Grenzschichten. Wiedem. Ann. 7 p. 375 (1879).

[4]) Über ein Theorem geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper

niemi także aerodynamiki i zastosowań do aeronautyki. Przeciwko rozumowaniu jego trzeba jednak podnieść kilka zasadniczych zarzutów, które obalają prawie wszystkie wnioski ostateczne. Pomijając błąd liczebny przy porównaniu spółczynnika lepkości $\frac{\mu}{\varrho}$ powietrza i wody (stosunek ich nie jest 0·8082 lecz 8·082), który zmienia zupełnie wyniki liczb, należy zwłaszcza podnieść: 1) zupełne nieuwzględnienie wpływu temperatury w równaniach zasadniczych; 2) pominięcie ściśliwości powietrza przy szybkim $\left(9\frac{m}{sec}\right)$ ruchu ogromnego balonu; 3) pominięcie lepkości w tym samym i w analogicznym przypadku — ruchu okrętu w wodzie. Znaczenie ostatniego punktu wynika z znanego rezultatu, że kula poruszająca się w cieczy bez lepkości, z stałą prędkością, wogóle żadnego nie doznawałaby oporu. Sądzę, że pojęcia podobieństwa nie można rozciągać na tak odrębne dwa przykłady [1]). W niniejszych wywodach pojęcie to używane jest w inny sposób, w ścisłem znaczeniu słowa].

Znając rozwiązanie danego zagadnienia powiększajmy wszystkie zmienne w pewnych stosunkach; kładźmy

$$
\begin{array}{lcl}
nx,\ nz,\ nz & \text{zamiast} & x,\ y,\ z \\
mu,\ mv,\ mw & " & u,\ v,\ w \\
bp & " & p \\
h\theta & " & \theta \\
\frac{n}{m}t & " & t
\end{array}
$$

i rozważmy, jakie między tymi spółczynnikami zachodzić muszą związki, ażeby także nowy ruch był dynamicznie możliwy. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, wynikającym z podstawienia tychże zmiennych w równania (10, 12) jest istnienie następujących tożsamości:

z (10):
$$\frac{bm^2}{hn} = \frac{b}{n} = \frac{m}{n^2}$$

---

betreffend, nebst Anwendung auf das Problem Luftballons zu lenken [Berl. Akad. Ber. 1873 p. 501; Ges. Abh. I, p. 158].

[1]) Znaczna część oporu okrętu pochodzi z wytwarzania fal, zależnych oczywiście od ciężkości; pod tym względem niema żadnej analogii między nim a balonem.

z (12):
$$\frac{mb}{n} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{h}{n^2};$$

które się sprowadzają do dwóch związków niezależnych między czterema wielkościami [1]):

(14) $$h = m^2; \qquad b = \frac{m}{n}.$$

Podamy kilka szczególnych przypadków dla uwydatnienia ważności praktycznej tego podobieństwa dynamicznego:

§ 8. Kładziemy $n = 1$, zatem $b = \sqrt{h} = m$. W tem samem naczyniu powstanie ruch zupełnie analogiczny do pierwotnego, jeżeli ciśnienia powiększone zostaną w stosunku pierwiastka z temperatury; prędkości wtedy w tej samej proporcyi się powiększą.

α) Tak prędkość głosu według wzoru $c = \sqrt{kR\theta}$ (niezależnego od ciśnienia) wzrasta w stosunku pierwiastka z temperatury.

Wzór ten jednak jest ważnym tylko, jeżeli chodzi o wychylenia bardzo małe, z pominięciem lepkości i przewodnictwa; uwzględniając te wpływy, otrzymałoby się formułę bardzo skomplikowaną zawierającą także ciśnienie. Mimo to wniosek powyższy pozostanie ważny, jeżeli się go odnosi do tonów, których ilość drgań proporcyonalna jest do $\sqrt{\theta}$ i jeżeli się mierzy prędkość przy ciśnieniach odpowiednich [2]). Odnosi się to także do rozchodzenia się głosu w rurach.

β) Opór (rozmiarów $x^2 p$) ciała poruszanego z prędkością małą jest przybliżenie do niej proporcyonalny; dokładnie stosuje się to do każdej prędkości, jeżeli równocześnie ciśnienie gazu w tym samym stosunku a temperatura w kwadratowym stosunku się powiększa.

γ) Podobne zastosowania do wypływu gazów.

§ 9. Przyjmiemy: $h = 1$, zatem $m = 1$, $b = \frac{1}{n}$: Temperatura jest niezmieniona; wtedy także prędkość pozostanie taka sama

---

[1]) Uwzględniając zależność spółczynników μ i $\varkappa$ od temperatury, otrzymałoby się pod założeniem proporcyalności ich do θ^α na miejscu (14, 2) równanie
$$b = \frac{m^{2\alpha+1}}{n}.$$

[2]) T. j. w ogólnym przypadku przy ciśnieniach proporcyonalnych do
$$\theta^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

w odpowiednich punktach dwóch naczyń podobnych, których rozmiary są w odwrotnym stosunku ciśnień gazu.

α) Istotnie łatwo się przekonamy, że temu żądaniu zadość czyni wzór Kirchhoffa [1]), odnoszący się do prędkości głosu w wązkich rurach (o promieniu r):

$$v = \sqrt{\frac{kp}{\varrho}}\left[1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi N}}\right]; \text{ gdzie } \gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} + \sqrt{\frac{\varkappa}{c\varrho}}\left[\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right];$$

(zważywszy, że N zmienia się w odwrotnym stosunku do rozmiarów).

β) Formuła Poiseuille-Meyera:

$$\Omega = \frac{p_2 - p_1}{l}\,\frac{R^4\pi}{8\mu} \tag{15}$$

ważna jest tylko co do ruchu spokojnego w długiej a wązkiej rurce. Zasada powyższa wskazuje, że zastosowanie jej do rurek w stosunku n dłuższych i szerszych tylko wtedy jest uprawnione, jeżeli równocześnie ciśnienia w odwrotnym stosunku zostaną zmniejszone [2]). Wtedy gaz osiągnie tę samą prędkość, a objętość wypływająca będzie n^2razy większa. Ale rezultat ten wcale nie jest związany z ważnością owego wzoru i nie jest ograniczony do ruchu statecznego ani też do ruchów spokojnych; stosuje się n. p. równie dobrze do wypływu z naczynia zamkniętego przez otwór w ścianie.

γ) Opór ciał geometrycznie podobnych poruszanych z daną prędkością w gazie o ciśnieniu odwrotnie proporcyonalnem do stosunku rozmiarów będzie proporcyonalny do tegoż stosunku.

Przy szybkim ruchu takich ciał powstaje szmer świszczący (Reibungstöne), zjawisko pod względem teoretycznym jeszcze zupełnie nie wyjaśnione. Mimo to możemy przepowiedzieć, że ilość drgań przy ciśnieniach odpowiednich będzie odwrotnie proporcyonalna do rozmiarów tych ciał $\left(\text{ponieważ } N \text{ będzie miało wymiar } \frac{u}{x}\right)$.

Istotnie prawo tego rodzaju zostało znalezione przez Strouhala [3])

---

[1]) Kirchhoff Pogg. Ann. 134 p. 177 (1868), Low Wied. Ann. 52 p. 652 (1894).

[2]) Podczas gdy w hydrodynamice według Helmholtza (loc. cit.) potrzebne jest zmniejszenie ciśnienia w stosunku $\frac{1}{n^2}$, ponieważ tam istnieje tylko jeden rodzaj podobieństwa:

$$b = m^2 = \frac{1}{n^2}.$$

[3]) Wied. Ann. 5, p. 216 (1878).

w pracy nad tonami powstającymi wskutek ruchu szybkiego ciał walcowatych, drutów etc. w powietrzu, ale prawo jeszcze dalej sięgające, mianowicie: że w powietrzu o ciśnieniu atmosferycznem ilość drgań jest przybliżenie proporcyonalna do ilorazu prędkości przez promień walca:

$$N = c\frac{v}{r}.$$

Zapomocą naszej metody wywnioskujemy łatwo, że formułka ta pociąga za sobą niezależność wysokości tonu od ciśnienia i temperatury.

Strouhal wprawdzie twierdzi, że obniżenie temperatury powoduje podwyższenie tonu, ale liczby, które przytacza, odpowiadające temperaturom 9·5° C i 37° C wcale nie wydają się przekonywującemi; zresztą, co prawda, także i wzór powyższy nie jest całkiem dokładny.

δ) Saint Venant i Wantzel[1]) zauważyli, że prędkość gazu wypływającego przez otwór nie może być powiększona przez podwyższenie ciśnienia ponad pewną granicę, która nie zależy od różnicy ciśnienia wewnętrznego p_2 i zewnętrznego p_1, tylko od ich stosunku $\frac{p_2}{p_1}$. Przyjąwszy ten wynik, wyobraźmy sobie dwa doświadczenia nad tym samym otworem, ale z różnemi ciśnieniami, w których ta wartość krytyczna została osiągnięta:

$$(1)\quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{P_2}{P_1} \quad (2).$$

Ów ruch pierwotny, określony przez p_2, p_1 będzie podobny do trzeciego rodzaju ruchu (3), określonego przez ciśnienia P_2, P_1 i rozmiary otworu zmniejszone w stosunku $\frac{p_2}{P_2} = \frac{p_1}{P_1}$. Ponieważ prędkość nie zmienia się przy zmianie 1—3, porównanie z przypadkiem drugim pokazuje, że prędkość wogóle niezależną będzie od rozmiarów otworu[2]).

Wniosek ten, będący konsekwencyą istnienia stosunku kry-

---

[1]) Journal de l'École polytechnique XVI (1839), Comptes Rendus 17 (1843). Potwierdzili te wyniki Zeuner, Hirn, Wilde, Salcher, Whitehead i inni.

[2]) Przybliżenie równa prędkości głosu (Lamb, Hydrodynamics p. 28).

tycznego $\frac{p_2}{p_1} = 1{\cdot}89$, zgadza się z wynikami prac nad tym przedmiotem.

Mach i Salcher[1]) i Emden[2]) spostrzegli powstawanie prążków w promieniu gazu wypływającego, gdy stosunek ciśnień przekracza ową wartość krytyczną. Emden tłómaczy to zjawisko różnicami gęstości, odpowiadającemi szeregowi fal akustycznych stojących. Odstępy tych prążków wyraził przez formułkę empiryczną:

$$\lambda = 0{\cdot}88\, d \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1{\cdot}9},$$

w której d oznacza średnicę otworu wypływania.

Nie zważając na tę formułę, porównajmy z danym przykładem drugi, podobny, gdzie wielkości d, p_1, p_2 zastąpiliśmy przez D, $p_1 \frac{d}{D}$, $p_2 \frac{d}{D}$; wskutek podobieństwa, λ musiałoby przejść w $\lambda \frac{D}{d}$. Nie można by a priori oznaczyć odpowiedniej wartości w trzecim przypadku określonym przez wielkości D, P_1, P_2, zadość czyniące relacyi

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_1 \frac{d}{D}}{p_2 \frac{d}{D}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ale jeżeli doświadczalnie dowiedziono, że λ zależy tylko od stosunku ciśnień, a nie od ich wartości bezwzględnych, wtedy wynika, że otrzyma ono w owym trzecim przypadku wartość $\lambda \frac{D}{d}$. Jest tak ogólnie udowodniona proporcyonalność długości λ do rozmiarów otworu: $\lambda = d\, fc.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$, a Emden nie potrzebował nawet przedsięwziąć odpowiedniego szeregu doświadczeń.

ε) Użyteczność tej metody uwydatni jeszcze następujący przykład:

Kohlrausch[3]) badał tony powstające podczas wypływu gazów przez wązkie szczeliny (Spaltentöne) pod względem zależności ilości

---

[1]) Sitzungsber. Wien. Akad. 98 (1889), Wied. Ann. 42, p. 144 (1890).
[2]) Wied. Ann. 69, p. 264, 426, 453 (1899).
[3]) Wiedem. Ann. 13, p. 545 (1881).

drgań od szerokości szczeliny s i od ciśnienia p_1 gazu w rezerwoarze przed szczeliną. Gaz wypływał na wolne powietrze, zatem skutek zmiany ciśnienia zewnętrznego p_2 nie mógł się w owych pomiarach uwydatnić. Możemy jednak a priori obliczyć, jaka ta zależność będzie. Zamierzamy znaleźć ogólny wzór $N = f(s, p_1, p_2)$, którego szczególny przypadek (dla $p_2 = p_0 =$ ciśnienie atmosferyczne) stanowi formułkę empiryczną Kohlrauscha: $N = f(s, p_1 p_0) = \varphi(s, p_1)$.

Skorzystajmy z podobieństwa ruchu s, p_1, p_2 do ruchu określonego przez wartości

$$s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}, \quad p_0,$$

dla którego będziemy mieć

$$N_0 = \varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}\right).$$

Ilości drgań w tych dwóch przypadkach muszą jednak być odwrotnie proporcyonalne do czasu (tak samo jak w § 8 α, γ; 9 α), a zatem $N_0 = N = p_0 : p_2$, co daje wreszcie wynik żądany:

$$N = \frac{p_2}{p_0}\varphi\left(s\frac{p_2}{p_0}, \quad p_1\frac{p_0}{p_2}\right) = f(s, p_1, p_2).$$

W podobny sposób (patrz § 8) możnaby także przepowiedzieć zależność od temperatury. Pomiary Kohlrauscha nie dadzą się jednak wyzyskać w taki sposób, ponieważ nie znajdujemy w nich podanych bezpośrednich wartości p_1, tylko od tychże zależne średnie prędkości U gazu wypływającego i ponieważ rezultaty ostateczne, streszczone we formule przybliżonej $N = A(U - B)$ i w tabliczce wartości A, B, jako funkcyj zmiennej s, nie uwydatniają tych związków w wyraźnej formie matematycznej.

§ 10. Trzeci szczególny przypadek $b = 1$, $m = 1$, podobieństwa dynamicznego, jako też modyfikacye zachodzące w razie uwzględnienia zależności lepkości od temperatury są mniej interesujące.

Zaznaczymy tylko jeszcze, że wobec istnienia zewnętrznej siły ciężkości tylko jeden rodzaj podobieństwa istnieje:

$$m = \sqrt{n}, \quad h = n, \quad b = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

który zastosowany być może do prądów konwekcyjnych powstających wskutek różnic temperatury wśród gazu.

§ 11. Czy podobieństwa dynamiczne stosuje się także do ruchów różnych gazów? Ażeby rozstrzygnąć tę kwestyę zmienimy w równaniach (10, 12) także spółczynniki R, k, μ, $\varkappa$. Oczywiście wskutek równania (12) podobieństwo jest niemożliwe dla gazów o różnych wartościach k. Przyjmując zatem k jako równe, zamieńmy podczas transformacyi (§ 7) także

R na $R\alpha$

μ „ $\mu\beta$

$\varkappa$ „ $\varkappa\gamma$.

Wynikają z tego warunki:

$$\frac{b}{\alpha h}\frac{m^2}{n} = \frac{b}{n} = \beta\frac{m}{n^2}$$

$$\frac{mb}{n} = \beta\frac{m^2}{n^2} = \gamma\frac{h}{n^2},$$

które sprowadzić można do trzech tożsamości:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = 1\,; \qquad \alpha h = m^2\,; \qquad nb = m\beta\,. \tag{16}$$

Ponieważ stała R jest odwrotnie proporcyonalną do ciężaru cząsteczkowego M, wynika z pierwszego z owych warunków, że podobieństwo tylko istnieć może, o ile stosunek $\frac{\mu}{\varkappa M}$ różnych gazów jest jednakowy. Tabliczka następująca spółczynników $\frac{\varkappa}{\mu}$ (względem powietrza) pomnożonych przez M pokazuje, że warunek ten istotnie dla różnych gazów dość dokładnie się spełnia:

$k=1{\cdot}4$	H_2	O_2	N_2	CO	NO
$\frac{\varkappa M}{\mu}$	$\frac{6{\cdot}7\,.\,2}{0{\cdot}50}=27$	$\frac{1{\cdot}0\,.\,32}{1{\cdot}1}=29$	$\frac{1{\cdot}0\,.\,28}{0{\cdot}97}=29$	$\frac{0{\cdot}98\,.\,28}{0{\cdot}97}=28$	$\frac{0{\cdot}95\,.\,30}{0{\cdot}98}=29$

$k=1{\cdot}3$	CO_2	N_2O	CH_4	NH_3
$\frac{\varkappa M}{\mu}$	$\frac{0{\cdot}64\,.\,44}{0{\cdot}82}=34$	$\frac{0{\cdot}67\,.\,44}{0{\cdot}82}=36$	$\frac{1{\cdot}37\,.\,16}{0{\cdot}62}=35$	$\frac{0{\cdot}92\,.\,17}{0{\cdot}57}=27$

Jako przykłady posłużą nam następujące, specyalne przypadki:

§ 12. $h = 1$, $b = 1$; zatem $m^2 = \alpha$, $n = m\beta = \beta\sqrt{\alpha}$:

Dla danej temperatury i pewnego rozkładu ciśnienia istnieją ruchy podobne w dwóch naczyniach, których rozmiary proporcyonalne są do stosunku $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ gazów zawartych; prędkości wówczas są proporcyonalne do $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

α) Łącząc tę zasadę z przybliżenie ważnem prawem Graham-Bunsena: że objętości różnych gazów wypływających przez mały otwór w cienkiej blaszce są proporcyonalne do $\frac{1}{\sqrt{M}}$, otrzymujemy wynik, że ilość gazu przepływająca przez różne, geometrycznie podobne otwory — w razie stałej różnicy ciśnienia — jest proporcyonalna do powierzchni otworu.

β) Przyjmiemy przewód długi a wązki, przez któryby przepływały objętości różnych gazów proporcyonalnie do spółczynnika płynności $\frac{1}{\mu}$.

Wnioskuje się w podobny sposób, że owa ilość gazu będzie proporcyonalną do trzeciej potęgi rozmiarów. Jest to rezultat pod pewnym względem ogólniejszy niż wzór Poiseuille-Meyera (15), który potwierdza go w specyalnym przypadku rurki o przekroju kołowym, jednostajnym.

γ) Podobnie wynika co do oporu ciał poruszających się w gazie, w razie założenia proporcyonalności do iloczynu z prędkości i z lepkości, że opór będzie w stosunku rozmiarów liniowych — w razie założenia proporcyonalności do iloczynu z kwadratu prędkości i z gęstości: że opór będzie w stosunku wymiarów powierzchniowych.

δ) Joule i Kelvin[1]) znaleźli doświadczalnie, że ciała, jak termometry, druty — tworzące ogniwo termoelektryczne itp. szybko poruszane w powietrzu, ogrzewają się aż do pewnego stopnia, mianowicie, że podwyższenie temperatury przy prędkościach od $30\frac{m}{sec}$ do $100\frac{m}{sec}$ przybliżenie proporcyonalne jest do kwadratu prędko-

---

[1]) Kelvin, Mathem. Phys. Papers I, p. 400, 445.

ści i niezależne od materyału i rozmiarów ciała $\left(\text{koło } 1^0\,\text{C dla } 55\,\frac{m}{sec}\right)$.

Wyobraźmy sobie: 1) ciało dane, o prędkości v w powietrzu; 2) drugie podobne, w innym gazie; 3) w tymże gazie trzecie ciało, o rozmiarach powiększonych w stosunku $\frac{\mu}{\mu_0}\sqrt{\frac{M_0}{M}}$, i obdarzone prędkością $v\sqrt{\frac{M_0}{M}}$. Używając naszej zasady podobieństwa do porównania *1—3*, wyniku empirycznego Kelvina do przypadków *3—2*, możemy przepowiedzieć z porównania *1—2*: że w różnych gazach (ale posiadających równe k) ciało poruszane z prędkością v ogrzeje się w miarę: $\Delta\theta = aMv^2$, t. j. proporcyonalnie do ciężaru właściwego gazu i kwadratu prędkości.

Z przedtem omawianego podobieństwa § 8 i § 9 wynika dalej dość niespodziewany rezultat, że stała a jest niezależna od ciśnienia i od temperatury gazu. Gdyby extrapolacya tego wzoru dla v większych aniżeli prędkość głosu była dozwolona — co oczywiście nie wydaje się prawdopodobne — możnaby obliczyć, że meteor lecący z prędkością $2{\cdot}8\,\frac{km}{sec}$ musiałby się ogrzać do 2500^0 C. Dla małych prędkości $\left(\text{poniżej } 30\,\frac{m}{sec}\right)$ powyższe prawo empiryczne przestaje być ważne, ale pomiary nie były wystarczające do uwydatnienia odpowiedniej modyfikacyi owej formuły.

§ 13. Podstawmy $h = 1$, $n = 1$; zatem $m = \sqrt{a}$, $b = \beta\sqrt{a}$.

W tem samem naczyniu, w danej temperaturze, będą podobnymi ruchy różnych gazów, jeżeli ciśnienia są w stosunku ich $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$; prędkości wtedy będą proporcyonalne do $\frac{1}{\sqrt{M}}$.

a) Istotnie zasadzie tej zadość czyni zwykła formuła prędkości głosu jako też wzór Kirchhoffa (§ 9 a) na rozchodzenie się głosu w rurach.

Łatwo też sprawdzić, że formuła Strouhala (§ 9 γ) o wysokości tonu, utworzonego przez ruch ciała walcowatego, pociąga za sobą równość stałej c dla różnych gazów, zatem niezależność tonu od rodzaju gazu. Nie znamy jeszcze doświadczeń tyczących się tej kwestyi.

Podobnie Emden, znalazłszy dla powietrza formułę (§ 9 δ) mógł był bezpośrednio wnioskować, że odstęp prążków λ będzie niezależny od istoty gazu, co faktycznie doświadczenia jego wykazały, tak samo, jak możemy przepowiedzieć (według § 8), że znajdzie się tę wielkość niezależną od temperatury.

W podobny sposób można sobie nieraz ułatwić badania doświadczalne zapomocą takich rozumowań, albo można rozszerzyć doniosłość wyników osiągniętych.

β) Stosunek objętości gazu przepływającego do działającej różnicy ciśnienia będzie proporcyonalny dla różnych gazów do spółczynnika płynności $\frac{1}{\mu}$:

$$\frac{V}{p_1 - p_2} \sim \frac{1}{\mu},$$

jeżeli użyjemy ciśnień odpowiednich. Dzięki temu możemy zaprowadzić znaczne ulepszenie w mierzeniu lepkości.

Formułka Poiseuille-Meyera

$$\frac{V}{p_1 - p_2} = \frac{R^4 \pi}{8 L} \frac{1}{\mu}$$

nie uwzględnia ani bezwładności gazu, ani tarcia powstającego wskutek zmienności prędkości wzdłuż rurki, ani różnic temperatury (§ 27). Mimo to można wykonać dokładne pomiary względne lepkości, nie używając ciśnień dowolnych, lecz proporcyonalnych do $\frac{\mu}{\sqrt{M}}$ dla różnych gazów. I to pozostanie ważne bez względu na kształt naczynia lub przewodu, nawet dla wypływu przez otwór w cienkiej blaszce.

γ) Także metoda Maxwella-Meyera („krążków wahających się“) nie jest bez zarzutu z powodu nieścisłosci odnośnej teoryi matematycznej, ale mimo to można jej używać do dokładnych pomiarów względnych lepkości, wprowadzając gaz pod ciśnieniem odpowiedniem i zmieniając zawieszenie krążka w ten sposób, ażeby czas wahania był proporcyonalny do $\sqrt{M}$. Oczywiście stosuje się to wszystko, ściśle biorąc, tylko do gazów o równej wartości k i $\frac{\varkappa M}{\mu}$, ale także przy małych różnicach tych wielkości rezutlaty otrzymane

powyższym sposobem będą dokładniejsze, aniżeli przy zastosowaniu zwykłych metod [1]).

III. Zjawiska cieplne towarzyszące wypływowi.

§ 14. Zamierzamy w tym rozdziale zastosować nasze równanie termiczne do zjawisk cieplnych, powstających podczas wypływu gazów przez przewody lub otwory, opracowanych w sławnych badaniach Joulea i Kelvina [2]). Albowiem, mimo że co do ogólnej interpretacyi tych doświadczeń niema żadnej wątpliwości tak, że od dawna bywają zaliczane do klasycznych doświadczeń z dziedziny termodynamiki, to przecież szczegółowe objaśnienie przedstawia trudności, które usunięte być mogą tylko przez szczegółową teoryę aerodynamiczną.

Tak tłumacząc w zwykły sposób zjawisko Joule-Kelvina nie uwzględnia się, że różne warstwy gazu wypływającego różne mają prędkości i różne mogą mieć temperatury; zwykle przyjmuje się, że podczas rozprężenia adiabatycznego gazu musi nastąpić obniżenie temperatury, ale — jak ono się rozdzieli na gaz wypływający i na ten, który pozostaje w rezerwoarze, pozostaje niejasnem.

W tym celu przeistoczymy równanie (12) mnożąc je przez element objętości i całkując w obrębie odpowiedniej przestrzeni, wypełnionej gazem [3]). Zważmy oprócz tego, że

$$\iiint p \operatorname{div} d\omega = \iint p\,(ul+vm+wn)\,dS - \iiint \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right) d\omega \quad (17)$$

wprowadźmy wartości $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ z (10) i zamieńmy całki potrójne — z wyjątkiem tej, która zawiera $\frac{\partial}{\partial t}$ — w całki powierzchowne. Oznaczając dla skrócenia prędkość normalną do powierzchni przez v_n, prędkość wypadkową przez $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, otrzymujemy tym sposobem równanie:

---

[1]) Możnaby skorzystać z tego w celu zbadania ścisłości metod Graham-Poiseuilla i Maxwell-Meyera, które n. p. Schumannowi [Wied. Ann. 23. p. 353 (1884)] dały sprzoczne wyniki.

[2]) Kelvin, Mathem. Physic. Papers I, p. 333; Joule, Mechan. Wärmeäquivalent. Braunschw. 1872.

[3]) Przyjmujemy przestrzeń jednokrotnie zwartą.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]d\omega+$$

$$+\iint\left\{\left[\frac{kp}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]v_n-\frac{\mu}{3}v_n\,\mathrm{div}-\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right\}dS+$$

$$+\mu\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\right.$$

(18) $$\left.+\frac{1}{3}(\mathrm{div})^2\right]d\omega=\iiint\Phi\,d\omega+\varkappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}dS.$$

Z całką objętościową z lewej strony, pomnożoną przez μ, znoszą się odpowiednie wyrazy z Φ, a pozostające mogą zostać przekształcone według wzoru:

(19) $$\iiint\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)dv=\iint w\left(m\frac{\partial v}{\partial z}-n\frac{\partial v}{\partial y}\right)dS,$$

w całkę, którą symbolicznie napiszemy:

$$\iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)(ul+vm+wn)-v_n\,\mathrm{div}\right]dS=$$

$$=\iint\left[\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n-v_n\,\mathrm{div}\right]dS.$$

Rezultatem ostatecznym jest równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left[\frac{p}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]d\omega+\iint\left\{\left[\frac{kp}{k-1}+\varrho\frac{V^2}{2}\right]v_n+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\mu v_n\,\mathrm{div}-\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mu\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)v_n\right\}dS=$$

(20) $$=\varkappa\iint\frac{\partial\theta}{\partial n}dS.$$

§ 15. Jeżeli gaz płynie prądem stałym, to znika w powyższem równaniu pierwsze wyrażenie i pozostaje całka powierzchowna, którą zastosować możemy do kawałka włókna prądu długości s, zamkniętego przekrojami q_1 i q_2.

Zważając na równanie ciągłości, które przyjmuje formę: $\varrho Vq=$ const., otrzymamy:

(21) $$\frac{kR}{k-1}(\theta_1-\theta_2)+\frac{V_1^2-V_2^2}{2}+\frac{2}{3}\mu\left[\frac{\mathrm{div}_1}{\varrho_1}-\frac{\mathrm{div}_2}{\varrho_2}\right]-$$

$$-\mu\left[\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial V_1}{\partial s}-\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial V_2}{\partial s}\right]=\frac{1}{\varrho Vq}\iint\left[\mu\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right)+\varkappa\frac{\partial\theta}{\partial n}\right]dS.$$

Różnica temperatury w dwóch punktach położonych na tej samej linii prądu jest zatem w związku z wartościami $\frac{\partial V}{\partial s}$, div i kwadratu prędkości w tych punktach, ale także z długością drogi między tymi punktami, od której będzie zależeć wartość ostatniej całki.

W miejscach, gdzie gaz płynie z dostatecznie jednostajną i małą prędkością (np. we wnętrzu dwóch zbiorników połączonych zapomocą wązkiej rurki), można pominąć wyrażenia pierwszego rodzaju, lecz nie stosuje się to samo do owej całki, która zależy od rozkładu prędkości i temperatury między owymi punktami i która w ogólności nie będzie równa zeru. Byłoby to ważne, co prawda, gdyby np. zachodziło równanie

$$\nabla^2 \left[\mu \frac{V^2}{2} + \varkappa \theta\right] = 0;$$

ale to stanowiłoby zupełnie wyjątkowy przypadek.

A) Wogóle zatem nie można twierdzić, żeby podczas przepływu statecznego temperatura gazu pozostała niezmienioną; różne jego warstwy będą miały temperatury różne.

§ 16. Twierdzenie co do niezmienności temperatury stosuje się tylko w pewnym przypadku do przeciętnej temperatury gazu wypływającego.

Przeciętną temperaturą przekroju nazywamy temperaturę, którąby gaz przechodzący przez przekrój (ortogonalny do linii prądu) przyjął, gdyby wszystkie jego warstwy zupełnie się zmieszały, t. j.:

$$\Theta = \frac{\Sigma \theta \varrho q V}{\Sigma \varrho q V}, \tag{22}$$

gdzie sumowanie odnosi się do wszystkich elementów q przekroju.

Przyjmiemy teraz, dla uproszczenia wywodu, że punkt *1* leży we wnętrzu rezerwoaru *1*, gdzie warunki powolności i jednostajności ruchu są spełnione. Zważmy dalej, że ściany naczynia utworzone są przez rurki prądu, przylegające do nich, że można zatem V rozwinąć względem odległości δn od ścian w następujący sposób:

$$V = \delta n \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0, \quad \text{a zatem, że:} \quad \frac{\delta}{\partial n}(V^2) = 2\,\delta n \,.\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$$

co znika dla $\delta n = 0$, na powierzchni ściany, tak samo jak V. Dla temperatury przeciętnej otrzymujemy więc z (21):

równanie:

$$(23)\quad \frac{kR}{k-1}[\theta_0-\Theta]=\frac{\frac{1}{2}\Sigma\varrho q\, V^3+\mu\Sigma\left(\frac{2}{3}\mathrm{div}+2\frac{\partial V}{\partial s}\right)Vq+\int\varkappa\frac{\partial\theta}{\partial n}dS.}{\Sigma\varrho q\, V}$$

Całkę $\int\varkappa\frac{\partial\theta}{\partial n}dS$ wyobrażamy sobie przytem rozdzieloną na trzy części: odnoszące się do dwóch przekrojów i do ścian naczynia; jeżeli te ściany są idealnymi izolatorami ciepła, to ostatnia część musi być równa zeru, a również znikną dwie inne, jeżeli przekrój przechodzi przez części, gdzie warunki jednostajności i powolności ruchu są spełnione. A zatem:

B) W takich miejscach, gdzie gaz płynie dostatecznie powoli i jednostajnie, temperatura przeciętna gazu wypływającego będzie równa temperaturze panującej w rezerwoarze. To właśnie wykazały owe doświadczenia Joule-Kelvina nad gazem, który najmniejsze okazuje zboczenia od prawa Boyle Charlesa, nad wodorem i w których zatyczka z waty zastępuje cały system przewodów wypływowych. Ciekawem byłoby jednak sprawdzenie poprzedniego rezultatu co do różnic temperatury n. p. w różnych warstwach gazu wypływającego z wązkiej rurki, w którym nasza teorya różni się od zwykłego rozumowania. Różnica polega oczywiście na tem, że pracą dla gazu lepkiego nie będzie określona przez $\int(ul+vm+wn)\,dS$, lecz przez $\int(up_{xn}+vp_{yn}+wp_{zn})\,dS$. Równość tych dwóch wyrażeń łatwo może być wykazana dla ruchu stałego zapomocą transformacyj podobnych do owych w § 14, ale tylko dla całej ilości gazu między ścianami i dwoma przekrojami, nie dla pojedynczych włókien prądu.

Oczywiście uwagi te zresztą w niczem nie naruszają wniosków, które z owych doświadczeń wywodzone bywają co do ścisłości prawa Boyle-Charlesa.

§ 17. Powróćmy jeszcze do równania (21) i zważmy, że dla włókien prądu przylegających do ścian, V, div, $\frac{\partial V}{\partial s}$ będą równe zeru. Ponieważ temperatura w tych warstwach musi zostać skończoną, wymaga to, ażeby także całka po prawej stronie znikła. Ową całkę można napisać w postaci:

$$\iiint\left[\mu\nabla^2\left(\frac{V^2}{2}\right)+\varkappa\Delta^2\theta\right]d\omega,$$

a zważywszy, że V można rozwinąć w blizkości ścian:

$$V = \zeta\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0 + \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\right)_0 + \zeta\xi\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial n}\right)_0 + \ldots$$

otrzymamy wartość graniczną:

$$\nabla^2\left(\frac{V^2}{2}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$$

tak, że odnajdujemy tym sposobem znów warunek

$$\mu\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = -\varkappa \Delta^2 \theta,$$

który przedtem wypowiedziany został jako równanie (13).

Zresztą temperatura warstwy powierzchownej oczywiście równać się musi temperaturze ściany.

§ 18. Rozważmy jeszcze bliżej, jaki będzie skutek energii kinetycznej, przyjmując dla uwydatnienia jego i dla uproszczenia, że prędkość w przewodzie jest tak duża, że wyrażenia w (21) zależne od pierwszej jej potęgi można pominąć w porównaniu z drugą potęgą.

Mamy wtedy dla każdego włókna prądu równanie:

$$\frac{k\,R}{k-1}(\theta_0 - \theta) = \frac{V^2}{2}. \tag{24}$$

Gdyby gaz wogóle nie posiadał żadnej lepkości, istniałby oprócz tego dla każdego włókna prądu związek [1]) wynikający z ogólnych równań hydrodynamicznych:

$$\int \frac{dp}{\varrho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}, \tag{25}$$

przyczem całka odnosi się do długości linii prądu od zbiornika aż do punktu, do którego równanie się odnosi.

Różniczkując jedno i drugie równanie względem długości włókna, otrzymujemy:

$$-\frac{k}{k-1} R \frac{d\theta}{ds} = V\frac{dV}{ds} = -\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{ds}$$

a całkując, przy wprowadzeniu prawa Boyle Charlesa:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{k-1}. \tag{26}$$

zatem zwykły wzór „rozprężenia adiabatycznego“.

[1]) Patrz: Lamb, Hydrodynamics p. 22.

Wzór ten zwykle w podobnych przypadkach bywa przyjmowany „a priori“. Jak dalece to jest błędne dla rzeczywistych, lepkich gazów, wynika z prostej konkluzyi, że wymagałby on ochłodzenia się stałego prądu gazu przepływającego wskutek spadku ciśnienia z p_1 do p_2 według wzoru:

$$\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

podczas gdy widzieliśmy w § 16, że temperatura średnia pozostaje niezmieniona.

C) Równanie (24) jednak pozostaje ważne także z pewnem przybliżeniem dla gazu lepkiego, ponieważ ochłodzenie odpowiada nie rozprężeniu, lecz przyrostowi energii kinetycznej. Najniżej spadnie temperatura oczywiście tam, gdzie prędkość jest największa, np. przy otworze zbiornika o skomprymowanym gazie; to jest owo oziębienie [1]), które przez różnych badaczy zużytem zostało do skraplania gazów według metody „dynamicznej“. W miarę jak gaz zatraca swą prędkość, odzyskuje zato pierwotną temperaturę wskutek ciepła tarcia wewnętrznego.

Bezpośrednie użycie formuły (26) jest usprawiedliwione tylko dla rozprężenia nieskończenie powolnego; w innych przypadkach używać trzeba równania zupełnego (21), w razie ruchu szybkiego równania przybliżonego (24), a jeżeli przewodnictwo cieplne przeważa, rozkładu izotermicznego.

§ 19. Dotychczas przyjmowaliśmy, że prąd jest stateczny, więc że ciśnienie w zbiornikach zostaje utrzymane na stałym poziomie — np. zapomocą przyrządu w rodzaju gazometrów lub flaszki Mariottea, albo przez połączenie ze stałym źródłem gazu. W chwili jednak, gdy przypływ przerwiemy tak, że gaz przepływać będzie tylko dzięki ekspanzyi zawartości zbiornika, natychmiast rozkład temperatury zacznie się zmieniać, ponieważ wtedy po prawej stronie równania (21) dodać trzeba:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\left(\frac{R\,\theta}{k-1}+\frac{V^2}{2}\right)dm.$$

Ograniczając się do przestrzeni rezerwoaru *1*, gdzie prędkości będą bardzo małe i temperatura jednostajna, otrzymamy zatem z (20):

---

[1]) Przyczynia się w znacznej mierze także zjawisko Joule-Kelvina.

$$\frac{\partial p}{\partial t}\iiint d\omega = -kp\iint v_n\,dS, \tag{27}$$

co w połączeniu z równaniem ciagłości

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}\iiint d\omega = -\varrho\iint v_n\,dS \tag{28}$$

daje wzór (26) i równanie:

$$p = p_0\, e^{-\frac{k}{\Omega}\iiint v_n\,dS\,dt}, \tag{29}$$

w którem Ω oznacza całą pojemność zbiornika.

D) We wnętrzu zbiornika *1* ciśnienie i temperatura opadają zatem w miarę wypływu według zwykłego wzoru „adiabatycznego“.

§ 20. W przewodzie, przez który gaz rezerwoar opuszcza, będą panowały stosunki zawilsze, które objaśnić mogłoby tylko szczegółowe rozwiązanie problematu; ale można z pewnem przybliżeniem znaleźć temperaturę gazu, który go opuścił.

Zastosujmy równania (27) i (28) do dwóch przekrojów, prostopadłych do linij prądu, pierwszego położonego w zbiorniku *1*, niedaleko ujścia, drugiego w zbiorniku *2*, niedaleko dopływu; oznaczając objętości odpowiednie znakami Ω_1 i Ω_2, otrzymamy równania: Dla Ω_1:

$$\Omega_1\frac{dp_1}{dt} + kp_1\iint_1 v\,dS = 0 \tag{30, 1}$$

$$\Omega_1\frac{d\varrho_1}{dt} + \varrho_1\iint_1 v\,dS = 0. \tag{30, 2}$$

Dla $\Omega_1+\Omega_2$, zaniedbując pojemność przewodu:

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2) + k\iint_2 p_2\,v\,dS = 0 \tag{31, 1}$$

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1\varrho_1 + \Omega_2\varrho_2) + \varrho_2\iint_2 v\,dS = 0 \tag{31, 2}$$

Dzieląc równanie (31, 1) przez (31, 2) i zmniejszając Ω_2 w porównaniu z Ω_1, otrzymujemy:

$$k\frac{p_2}{\varrho_2} = \frac{d(\Omega_1 p_1 + \Omega_2 p_2)}{d(\Omega_1\varrho_1 + \Omega_2\varrho_2)} = \frac{dp_1}{d\varrho_1} = k\frac{p_1}{\varrho_1},$$

to znaczy: $\theta_2 = \theta_1$. (32)

E) Pod założeniami twierdzenia *B*, temperatura średnia gazu wpływającego do zbiornika *2* będzie zatem równa temperaturze gazu znajdującego się w rezerwoarze *1*, rozprężającego się adiabatycznie (pomimo, że ciśnienie jest niższe).

Sprawdzić można ten wynik, obliczając odpowiednią pracę zewnętrzną i ilość ciepła pochłoniętego, które okazują się równemi $V\frac{p_0 - p_1}{k}$, t. j. oczywiście mniejszemi aniżeli wartości odpowiadające rozprężaniu odwracalnemu.

§ 21. Wyniki te zasługują na uwagę badaczy, którzy zajmują się efuzyą, transpiracyą i podobnemi zjawiskami, ponieważ wykazują, jakie błędy mogą pochodzić w razie badania praw wypływu statecznego z używania rezerwoarów zamkniętych. Tak n. p. Donnan[1]), mierząc czas potrzebny do zniżenia początkowego ciśnienia w zbiorniku 525 *mm* do 322 *mm*, nie otrzymał w rzeczywistości względnych czasów efuzyi różnych gazów, ponieważ temperatura nie pozostawała stałą (jak on sądzi, równą 25° C), tylko np. dla powietrza mogła się obniżyć aż do — 14° C, dla bezwodnika węglowego — 9°, a dla Argonu do — 28°. Różnice te oczywiście bardzo są przesadzone, ponieważ musiały one zostać wyrównane częściowo wskutek przewodzenia ciepła ku ścianom naczynia, ale w każdym razie okazują one konieczność używania gazometrów o stałem ciśnieniu w celu uniknięcia możliwości tak znacznych błędów. Już Joule i Kelvin zauważyli, jak ważny był ten warunek dla poprawności ich pomiarów.

Podobne zarzuty można uczynić większej części podobnych badań, nawet w pewnej mierze ciekawej pracy Emdena (loc. cit.). Emden nie zaradził temu przez używanie wentyla regulującego ciśnienie (Druckreducirungsventil), ponieważ gazu, który przezeń przepłynął, nie ogrzewał do niezmiennej temperatury.

Ten zarzut jeszcze bardziej tyczy się doświadczeń Macha i Salchera, wykonanych zapomocą ciśnień znacznie wyższych a zbiornika o mniejszej pojemności, i może to też wytłómaczyć sprzeczność odpowiednich pomiarów temperatury gazu wypływającego [obniżenie kilkunastu stopni według Emdena, koło stu stopni według Macha].

Zresztą zauważyć należy, że temperatury gazu, poruszającego się z wielką gwałtownością, żadną miarą nie można mierzyć zapo-

[1]) Philos. Magazine 49, p. 423 (1900).

mocą termometru, ponieważ obecność jego zupełnie zmieniłaby ruch gazu i rozkład temperatury.

IV. Rozwiązania szczegółowe zagadnień aerodynamicznych.

§ 22. Ograniczymy się na zanalizowaniu kilku prostych przykładów, z których jednak niektóre służą do illustracyi metod ogólniejszych.

Przykład najprostszy, trywialny, jest to ruch stały gazu między dwiema powierzchniami walcowatemi, zewnętrzną o promieniu r_2 stałą, a wewnętrzną o promieniu r_1 wykonywującą n obrotów na sekundę.

Oznaczając znakiem ω prędkość kątową w odległości r od osi symetryi, mamy rozwiązanie

$$u = -\omega\frac{y}{r}; \quad v = \omega\frac{x}{r},$$

które spełnia równania (10) pod warunkiem:

$$\omega = -\frac{a}{2r^2} + b = \frac{2\pi n}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right] \tag{33}$$

ciśnienie wynika z warunku:

$$\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \varrho$$

jeżeli wiadoma jest temperatura.

Do jej oznaczenia służy równanie (12) dające po zcałkowaniu rezultat

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu}{4\varkappa}a^2\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_2^2}\right] + c\log\frac{r}{r_2}, \tag{34}$$

w którem θ_0 oznacza temperaturę zewnętrznego walca.

Ażeby oznaczyć stałą c, przyjmiemy, że z wewnętrznego walca nie uprowadzamy ciepła tak, że on osięgnie równowagę termiczną, gdy

$$\varkappa\frac{d\theta}{dr}\Big|_{r=r_1} = 0.$$

Temperatura odpowiednia jest:

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{\mu a^2}{4\varkappa}\left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2}\log\frac{r_1}{r_2}\right] \tag{35}$$

albo w przybliżeniu dla małej grubości $r_1 - r_2$:

(36) $$\theta_2 = \theta_0 + \frac{2\mu}{\varkappa}(\pi n r_2)^2,$$

co daje np. dla $n = 100$, $r_2 = 10$ *cm*, w powietrzu: $\theta_2 = \theta_0 + 1{\cdot}4^0$ C.

§ 23. Robiąc $r = \infty$, lub też przyjmując z góry $u = w = 0$; $v = f(x)$; przechodzimy do stałego ruchu „lamelarnego", równoległego do płaszczyzny YZ, który odbywa się tak samo, jak u cieczy: $v = bx + c$.

U cieczy jednak możliwym jest także ruch lamelarny zmienny. Jeżeli np. płaszczyzna OYZ wykonywa ruch drgający w kierunku osi V: $v_0 = A \cos \gamma t$, to ruch ten rozchodzi się w kierunku osi X wskutek równania

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

według tego samego prawa, jak ciepło w ciele peryodycznie ogrzanem, mianowicie:

(37) $$v = A e^{-x\sqrt{\frac{\varrho_0}{2\mu}}} \cos\left(\gamma t - x\sqrt{\frac{\varrho_0}{2\mu}}\right).$$

W gazach jednak napotykamy tę osobliwość, że równania (10, 11, 12) nie mogą być spełnione ściśle w razie założeń $u = 0$ i $v = fc.(x, t)$, ponieważ wskutek ciepła wytworzonego przez tarcie musi powstać także składowa prędkość u w kierunku X; łatwo wykonać dotyczące przybliżone obliczenie. Jest to ciekawy przykład, jak drgania poprzeczne wytwarzać mogą falowania podłużne, akustyczne; pierwsze będą przeważać w blizkości ściany OYZ, drugie zaś we większej odległości, ponieważ ich spółczynnik zanikania będzie mniejszy. Rozrzedzenie gazu powiększy zanikanie fal podłużnych, a zmniejszy fal poprzecznych.

§ 24. Jako drugi przykład, który także uwydatnia różnicę gazów a cieczy, obierzemy prąd stateczny w kierunku X, którego prędkość zależna jest tylko od x; ściany trzebaby przyjąć oczywiście jako zupełnie gładkie, lub też tak odległe, że żadnego nie wywierają wpływu. Pomijając zatem także przewodnictwo, będziemy mieli równania:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho u \frac{du}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{4\mu}{3} \frac{d^2u}{dx^2} \\ &\frac{d}{dx}(\varrho u) = 0 \\ &u \frac{dp}{dx} + k p \frac{du}{dx} = (k-1) \frac{4\mu}{3} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right| \tag{38}$$

Przykład ten budzi pewien interes dlatego, że równania odpowiednie mogą być rozwiązane ściśle, podczas gdy w hydrodynamice nie znamy żadnego rozwiązania ścisłego równań zupełnych (z wyjątkiem kilku przykładów trywialnych jak poprzedni). Analogiczny ruch stateczny nie może się odbywać w cieczy nieściśliwej, ponieważ niema tam tarcia wewnętrznego wskutek rozprężania, któreby mogło przeciwdziałać przyspieszeniu powstającemu wskutek różnic ciśnienia.

Równania (38, 2) i (38, 1) można całkować bezpośrednio:

$$\varrho u = b \tag{39, 2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{4\mu}(b u + p - a). \tag{39, 1}$$

Taksamo (38, 3) podzieliwszy je poprzednio przez $\frac{du}{dx}$ i podstawiwszy (39, 1):

$$p = (k-1) \frac{b}{2} u - \frac{c}{u} - (k-1) a. \tag{39, 3}$$

A z tego równania wynika przez podstawienie w (39, 1) i całkowanie:

$$x = m + \frac{4\mu}{3} \int \frac{u\, du}{(k+1)\frac{b}{2} u^2 - k a u - c}, \tag{40}$$

gdzie całka w znany sposób da się wyrazić przez funkcye logarytmiczne lub cyklometryczne.

Zadanie zatem jest rozwiązane, czy ono jednak ma zastosowanie praktyczne, wydaje się rzeczą wątpliwą. Dziwne może się wydać, że potrzeba czterech danych, a, b, c, m do określenia zupełnego, podczas gdy przywykliśmy, używając np. wzoru Poiseuillea określać przepływ przez trzy wielkości: ciśnienie w dwóch punktach i temperaturę gazu. Zobaczymy jednak, że polega to tylko na osobliwej prostocie wzoru Poiseuillea, pochodzącej z pominięcia czyn-

ników drugorzędnych, mianowicie rozkładu ruchu w przekrojach końcowych rurki.

§ 25. Łatwiej możnaby urzeczywistnić ruch zmienny rodzaju: $v = w = o$; $u = F(x, t)$; ale wtedy obliczenie nie może być wykonane bez specyalnych uproszczeń.

Przyjmiemy zatem, że gaz, o początkowem ciśnieniu p_0 i temperaturze θ_0, znajduje się w naczyniu walcowatem, o idealnie gładkich ścianach, w jednym końcu zamkniętem, podczas gdy z drugiej strony tłok, o bardzo małej masie, wciskanym zostaje przez stałą siłę a. Dla ułatwienia obliczenia pominiemy zupełnie wpływ bezwładności gazu, przyjmując chwilowy stan ruchu we wszystkich warstwach jednakowy, zatem:

(41) $$u = x f(t).$$

Siła a musi być równoważona przez sumę ciśnienia gazu wewnętrznego i tarcia wewnętrznego, mianowicie [według (1)]:

(42) $$p_{xx} = a = p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Uwzględniając, że według (41): $\frac{\partial u}{\partial x} = f(t)$ i wstawiając wartość p (42) do równania termicznego:

$$\frac{dp}{dt} + k p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4\mu}{3} (k - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

otrzymamy równanie różniczkowe:

(43) $$\frac{df}{dt} + \frac{3ak}{4\mu} f + f^2 = 0,$$

a przez jego całkowanie:

(44) $$\frac{1}{f} = A e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}; \text{ gdzie: } \alpha = \frac{3ak}{4\mu}.$$

Wprowadzając wartość początkową:

$$\frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} = p_0 - a,$$

otrzymujemy:

(45) $$u = \frac{a x}{\left(\frac{a k}{p_0 - a} + 1\right) e^{\alpha t} - 1}.$$

Gęstość ϱ wynika z równania ciągłości przyjmującego tutaj kształt:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

mianowicie:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\int_0^t f\,dt} \tag{46}$$

wartość całki może być obliczona zapomocą wzoru:

$$\int \frac{dt}{A e^{\alpha t} - B} = \frac{1}{\alpha B} \log \left(\frac{A e^{\alpha t} - B}{A e^{\alpha t}}\right)$$

tak, że wreszcie będzie:

$$\varrho = \varrho_0 \left[1 + \frac{p_0 - a}{a k} (1 - e^{-\alpha t})\right]^{-1}. \tag{47}$$

Gęstość, ciśnienie i temperatura będą się zatem zbliżać asymptotycznie do wartości ostatecznych:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_\infty &= \frac{\varrho_0}{1 + \frac{p_0 - a}{a k}}; \qquad p_\infty = a; \\ \theta_\infty &= \frac{p_\infty}{R \varrho_\infty} = \frac{a\left(1 + \frac{p_0 - a}{a k}\right)}{R \varrho_0} = \theta_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{a}{p_0} \frac{k-1}{k}\right] \end{aligned}\right| \tag{48}$$

Przykład ten jest interesujący ze względu na porównanie ze zwykłą formułą ściśnienia adiabatycznego, która wymagałaby:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{a}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}; \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{a}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wzór ten daje dla podwyższenia temperatury wartości mniejsze, aniżeli nasz rachunek, co jest zresztą przez się zrozumiałem, ponieważ formułka adiabatyczna ważną jest tylko dla rozprężenia nieskończenie powolnego i nie uwzględnia wpływu tarcia wewnętrznego.

Prawda, że także w naszym rachunku pominęliśmy pewien czynnik: bezwładność gazu, — która dążyć będzie do zmniejszenia tych różnic i do wytworzenia wahań zanikających — i dlatego będzie on uzasadniony tylko dla gazu bardzo rozrzedzonego. Jednakowoż ten przykład pokazuje, że pewien, choć zapewne nieznaczny

błąd powstać musi także z użycia formułki „adiabatycznej“ do obliczenia stosunku ciepła właściwego gazów według metody Clement-Desormes'a.

Skutkiem tego będzie powiększenie pozorne spółczynnika k, podczas gdy przewodnictwo ciepła działa w kierunku przeciwnym. Zresztą zależny on będzie od sposobu, jak następuje ściśnienie gazu; gdyby naczynie na przykład miało kształt kulisty, o ścianach rozciągliwych, to wtedy tarcie nie miałoby żadnego wpływu, ani mechanicznego, ani termicznego, ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}=\text{const.}$$

zatem $p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p$; $\Phi=0$.

§ 26. System ogólnych równań aerodynamicznych jest tak skomplikowany, że nie można się spodziewać rozwiązania bezpośredniego oprócz w takich wyjątkowo prostych przypadkach. Zresztą pozostaje, oprócz wniosków omawianych w § 7—13, głównie metoda przybliżenia stopniowego.

Przytoczymy kilka przykładów:

Gdyby spółczynnik przewodnictwa $\varkappa$ był nieskończonym, to cały ruch odbywałby się ściśle izotermicznie; z pewnem przybliżeniem stosuje się to także wogóle tam, gdzie przewodnictwo wielką odgrywa rolę, np. w razie ruchów spokojnych w wązkich naczyniach; w miarę jednak jak $\varkappa$ różni się od owej wartości, oddali się stan gazu od owego rozkładu granicznego tak, że będzie można rozwinąć wszystkie wielkości w szeregi potęgowe kształtu:

$$(49)\quad \left|\begin{aligned} u&=u_0+\frac{u_1}{\varkappa}+\frac{u_2}{\varkappa^2}+\frac{u_3}{\varkappa^3}+\dots\\ \theta&=\theta_0+\frac{\theta_1}{\varkappa}+\frac{\theta_2}{\varkappa^2}+\frac{\theta_3}{\varkappa^3}+\dots\end{aligned}\right.$$

Podstawiając te wartości w równania (10, 11, 12) i łącząc wyrazy pomnożone przez pewną potęgę $\frac{1}{\varkappa}$, otrzymamy system równań o przybliżeniu stopniowem (oczywiście pod założeniem zbieżności), z którego trzy pierwsze określają rozkład najprostszy, izotermiczny:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_0 = \text{const} = \frac{p_0}{R\,\varrho_0} \\
&\frac{\partial p_0}{\partial x} = \mu\,\Delta^2 u_0 + \frac{\mu}{3}\,\frac{\partial\,\mathrm{div}_0}{\partial x} \quad \text{itd.} \\
&\frac{\partial(\varrho_0 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_0 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho_0 w_0)}{\partial z} = 0\ .
\end{aligned}\right| \tag{50}$$

$$\left.\begin{aligned}
&(k-1)\,\Delta^2\theta_1 = u_0\frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial p_0}{\partial z} + k\,\mathrm{div}_0 - (k-1)\,\Phi_0 \\
&\frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu\,\Delta^2 u_1 + \frac{\mu}{3}\,\frac{\partial\,\mathrm{div}_1}{\partial x} \quad \text{itd.} \\
&\frac{\partial(\varrho_0 u_1 + \varrho_1 u_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_0 v_1 + \varrho_1 v_0)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho_0 w_1 + \varrho_1 w_0)}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right| \tag{51}$$

§ 27. Spróbujmy zastosować tę metodę przybliżenia do zwykłej [1]) teoryi ruchu w rurkach Poiseuillea. Rozumowanie zwyczajne odpowiada równaniom (50) uproszczonym jeszcze przez przyjęcie $v = w = 0$ i przez pominięcie wyrażeń $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i. t. d.

W celu większego przybliżenia należy podstawić formuły, które się tak otrzymuje, mianowicie:

$$p = \sqrt{p_1{}^2 - \frac{x}{l}\,(p_1{}^2 - p_2{}^2)} = \sqrt{a - c\,x} \tag{52}$$

$$u = \frac{\delta^2 - r^2}{8\mu}\,\frac{c}{\sqrt{a - c\,x}} \tag{53}$$

w równanie (51, 1), które się tak przemienia w

$$\Delta^2\theta_1 = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\theta_1}{\partial r}\right) = \frac{c^2}{16\,\mu}\,\frac{\delta^2 - 2r^2}{a - c\,x}\,. \tag{54}$$

Z całkowania wynika:

$$\begin{aligned}
\theta_1 = -\frac{c^2}{128\,.\,\mu}\,\frac{(\delta^2 - r^2)^2}{a - c\,x} &= -\frac{1}{128\,.\,\mu}\left[\frac{(\delta^2 - r^2)(p_1{}^2 - p_2{}^2)}{l\,p}\right]^2 = \\
&= -\frac{u^2\mu}{2}\,.
\end{aligned} \tag{55}$$

Przy tym stopniu przybliżenia mamy zatem: $\theta = \theta_0 - \frac{u^2\mu}{2\varkappa}$ ciekawą jest rzeczą, że $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$ dla $r = \delta$, zatem gaz nie wymienia

---

[1]) O. E. Meyer. Pogg. Ann. 127, p. 253, 353 (1866); 148, p. 1 (1873).

ciepła z ścianą rurki. Największe ochłodzenie, na osi rurki, wynosi:

$$\Delta\theta = \frac{9 . \delta^4}{16 . 128 . \varkappa\mu}\left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{pl}\right]^2 . \tag{56}$$

Tak obliczamy n. p. dla doświadczeń Kocha[1]) nad lepkością pary rtęci, przyjmując zaokrąglone liczby $p_1 = 100$ *cm*, $p_2 = 1$ *cm*, $l = 10$ *cm*, $r = 0{\cdot}00425$ *cm*, obniżenie temperatury na osi rurki od 0·04° aż do 400° C. Nie twierdzimy oczywiście, żeby ten rezultat był ścisły, ale wystarcza on do udowodnienia, że formuła Poiseuillea, polegająca na założeniu spokojnego ruchu izotermicznego, w takich przypadkach nie może być zastosowaną i że dziwny wynik owej pracy — proporcyonalność lepkości μ do $\theta^{1\cdot6}$ — jest bezpodstawny. Podobne zarzuty trzeba uczynić pracy L. Meyera i Steudela[2]), a nawet niektórym pomiarom O. E. Meyera (loc. cit.), choć w ostatecznych ich liczbach wpływ zapewne będzie nieznaczny. Pokazuje to, jak ważnem jest dla ścisłości owego wzoru zastosowanie małej różnicy ciśnień, a wązkiej i długiej rurki.

Wzór (56) zresztą służyć może tylko do osądzenia, o ile warunek izotermizmu jest spełniony. Dalsze wykończenie rachunku przybliżenia nie byłoby usprawiedliwione ze względu na niedokładność wzoru pierwotnego (52, 53) spowodowaną uproszczeniami wspomnianemi[3]).

Z drugiej strony, chcąc wykonać obliczenie z uwzględnieniem owych czynników drugorzędnych — lepkości objętościowej i nierówności ciśnienia w różnych warstwach tego samego przekroju — natrafiłoby się na nową trudność: podanie ciśnienia w dwóch punktach osi p_1, p_2, i temperatury początkowej nie wystarczyłoby do oznaczenia stałych i funkcyj dowolnych rachunku; trzebaby do tego jeszcze znać rozmieszczenie prędkości i ciśnienia w przekrojach końcowych. To znaczy, że zadanie nie jest określone dostatecznie bez podania kształtu zbiorników, połączonych rurką, zwłaszcza w oto-

---

[1]) Wiedem. Ann. 19, p. 857 (1883).

[2]) Wied. Ann. 16, p. 386, 394 (1882).

[3]) Oczywiście także wyrażenia

$$\varrho u \frac{\partial u}{\partial x} \text{ itd.}$$

mogą wejść w rachubę, powodując zjawiska omawiane w § 30, które w przypadku analogicznym cieczy nieściśliwych bliżej zbadane zostały przez Reynolds'a, Phil. Trons. 174 (1883), p. 941; 186 (1895).

czeniu końców rurki. Okoliczność ta, która uwydatnia się, mianowicie wobec zjawiska t. zw. „vena contracta", w znacznej mierze może wpłynąć na ilość cieczy wypływającej przez krótkie, szerokie rury.

Mimo to metoda Poiseuillea, używana w sposób opisany w § 13, zawsze służyć może do dokładnych pomiarów lepkości względnej.

§ 28. Inny rodzaj zagadnień zostanie objaśniony przez następujący przykład. Rozważmy ruch gazu „spokojny", stały, o prędkości jednostajnej c w nieskończonej odległości, koło kuli stałej; zaznaczymy zaraz, że założenie to, opierając się na pominięciu wyrażeń $\varrho u \frac{\partial u}{\partial x}$ w porównaniu z $\mu \Delta^2 u$, wymaga, ażeby $\frac{\varrho c a}{\mu}$ było małą wielkością.

Rozwiązanie byłoby bardzo proste, gdyby gaz był nieskończenie zgęszczony, ponieważ wtedy *div* byłoby równe zeru (według 11), i ruch odbywałby się tak samo, jak w cieczy.

Chcąc znaleźć poprawki wynikające z ściśliwości, zważmy, że rozkład gęstości i tak samo też innych zmiennych zależny będzie od stałej wartości ciśnienia P w nieskończonej odległości, i że w miarę jak $\frac{1}{P}$ oddala się od wartości zero, ruch coraz więcej różnić się będzie od typu nieściśliwego.

Możnaby zatem rozwinąć wszystkie zmienne w szeregi według potęg $\frac{1}{P}$, przez co równania (10, 11, 12) rozpadłyby się w szereg równań o przybliżeniu stopniowem, podobnie jak w § 26. Dla większej przejrzystości rachunku ograniczymy się jednak z góry na dwóch wyrażeniach; wyobrazimy sobie zatem, że wszystkie zmienne składają się z dwóch części:

$$\left.\begin{array}{lll} u = u_0 + u_1\,; & v = v_0 + v_1\,; & w = w_0 + w_1\,; \\ p = p_0 + p_1\,; & \varrho = \varrho_0 + \varrho_1\,; & \theta = \theta_0 + \theta_1\,; \end{array}\right\} \qquad (57)$$

z których pierwsza przedstawia typ graniczny nieściśliwości, druga zaś poprawkę, małą w porównaniu z pierwszą częścią; z równania (9) wypływa wtedy związek:

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = R\theta_0\,; \quad \frac{p_1}{p_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} + \frac{\theta_1}{\theta_0}. \qquad (58)$$

przyczem pochodne $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ itp., uważamy za małe w porównaniu z p_0

Równanie (11) daje jako pierwsze przybliżenie:

$$(59)\quad \begin{cases} \operatorname{div}_0 = 0, \\ \text{jako drugie:}\quad \varrho_0 \operatorname{div}_1 + u_0 \dfrac{\partial \varrho_0}{\partial x} + v_0 \dfrac{\partial \varrho_0}{\partial y} + w_0 \dfrac{\partial \varrho_0}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

A z równania (12) wypływa:

$$(60)\quad u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + k p_0 \operatorname{div}_1 = (k-1)\left[\Phi_0 + \varkappa \Delta^2 \theta_0\right]$$

co przez uwzględnienie (59, 2) i (58, 1) zamienia się w:

$$(61)\quad \begin{aligned} & u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} + \Phi_0 = \\ & = \frac{k}{k-1} R \varrho_0 \left[u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right] = -\varkappa \Delta^2 \theta_0 \end{aligned}$$

Równanie (10) wreszcie daje:

$$(62)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_0}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_0\,; & \dfrac{\partial p_1}{\partial x} = \mu \Delta^2 u_1 + \dfrac{\mu}{3} \dfrac{\partial}{\partial x} \operatorname{div}_1\,; \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_0\,; & \dfrac{\partial p_1}{\partial y} = \mu \Delta^2 v_1 + \dfrac{\mu}{3} \dfrac{\partial}{\partial y} \operatorname{div}_1\,; \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_0\,; & \dfrac{\partial p_1}{\partial z} = \mu \Delta^2 w_1 + \dfrac{\mu}{3} \dfrac{\partial}{\partial z} \operatorname{div}_1\,. \end{cases}$$

Pierwsze przybliżenie przedstawione jest przez system (62, 1), który wraz z równaniem (59, 1) jest określeniem odpowiedniego zagadnienia z hydrodynamiki, rozwiązanego przez przyjęcie [1]):

$$(63)\quad \begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} ca \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \dfrac{x^2}{r^3} + c\left(1 - \dfrac{3}{4}\dfrac{a}{r} - \dfrac{1}{4}\dfrac{a^3}{r^3}\right) \\ v_0 = -\dfrac{3}{4} ca \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \dfrac{xy}{r^3} \\ w_0 = -\dfrac{3}{4} ca \left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right) \dfrac{xz}{r^3} \\ p_0 = P - \dfrac{3\mu}{2} c a \dfrac{x}{r^3} \end{cases}$$

Użyjemy tych wartości do obliczenia zmienności temperatury według równania (61).

---

[1]) Patrz n. p.: Lamb, Hydrodynamics p. 530.

Obliczenia lewej strony jego:

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} + w_0 \frac{\partial p_0}{\partial z} = \tag{64}$$

$$= -\frac{3}{2}\mu \frac{c^2 a}{r^3}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a}{r} - \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right) + \frac{9}{2}\mu \frac{c^2 a x^2}{r^3}\left(1 - \frac{5}{4}\frac{a}{r} + \frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{4}\mu \frac{c^2 a^2}{r^4}\left(3\frac{x^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} - 6\frac{a^2 x^2}{r^4} + 2\frac{a^4 x^2}{r^6}\right) \tag{65}$$

pokazuje, że uwzględniając ściśliwość nie można żadnym sposobem pominąć zmiany temperatury wskutek rozprężenia i ciepła tarcia, gdyż są to czynniki tego samego rzędu wielkości.

Równania różniczkowe kształtu powyższego (61) należące do typu „eliptycznego“:

$$\Delta^2 \vartheta + u_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = F,$$

które się często napotyka przy podobnych zadaniach, są mało dotychczas zbadane. Można całkowania dokonać zapomocą mozolnej metody przybliżenia stopniowego, rozwiązując po kolei:

$$\Delta^2 \vartheta' = F$$

$$\Delta^2 \vartheta'' = F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta'}{\partial z}\right)$$

$$\Delta^2 \vartheta''' = F - \left(u_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial y} + w_0 \frac{\partial \vartheta''}{\partial z}\right) \text{ itd.}$$

i zważając przytem na warunek dla powierzchni: $\vartheta = \Theta$.

Wolno się ograniczyć do pierwszego wyrazu tylko o ile spółczynnik $\frac{c a R \varrho_0}{\varkappa}$, od którego zależy zbieżność następujących po sobie poprawek, jest mały — warunek ilościowo zbliżony do początkowego założenia ruchu „spokojnego“. Wtedy z równania (61) oblicza się następująca wartość dla θ_0:

$$\theta_0 = \Theta + \frac{\mu c^2}{32\varkappa}\left\{\frac{a}{r}\left[19 + 13\frac{a^2}{r^2} + 24\frac{x^2}{r^2} - 39\frac{x^2 a^2}{r^4}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3a^2}{r^2}\left[-9 + \frac{3x^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a^4}{3r^4} + \frac{4a^2 x^2}{r^4} - \frac{2a^4 x^2}{r^6}\right]\right\} \tag{66}$$

Podstawiając tę wartość w (58, 1) (59, 2) wywieść można poprawkę w ciśnieniu wynikającą z uwzględnienia ściśliwości i zmien-

ności temperatury, która jednak w razie założenia ruchu spokojnego okazuje się bardzo małą w porównaniu z istniejącym już oporem tarcia[1]).

Ponieważ według (66) temperatura wzrasta w kierunku normalnym do powierzchni w miarę:

$$(67) \qquad \left.\frac{\partial \theta_0}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\mu c^2}{32 \varkappa a}[20 + 111 \cos^2 \varphi],$$

musiałoby ciało ogrzać się, i to więcej na „równiku" niż na biegunach, przeciętnie zaś (jeżeli dobrze przewodzi ciepło), jak przybliżony rachunek wskazuje, o:

$$(68) \qquad \delta \theta = \frac{57}{32} \frac{\mu c^2}{\varkappa}$$

niezależnie od wielkości kuli.

Uwzględnienie dalszych poprawek w szeregu ϑ', ϑ'', ϑ''' zmieniłoby rozkład w ten sposób, żeby się stał asymetrycznym, tj. żeby na „tylnym" biegunie powstała wyższa temperatura aniżeli na przednim.

Rezultat ten, jak też stosunkowo większe ogrzanie na równiku zgadza się z wynikami doświadczeń Kelvina i Joulea[2]) dla małych prędkości $\left(\text{poniżej } 13 \frac{m}{sec}\right)$; a także wzór (68) oddaje dobrze pomiary ich dla średnich prędkości pod względem niezależności ogrzania od rozmiarów ciała i proporcyonalności do kwadratu prędkości, tylko spółczynnik liczbowy jest mniejszy niż w rzeczywistości $\left[1^0 \text{C na } 28 \frac{m}{sec}\right.$, a według Kelvina $\left.1^0 \text{C na } 55 \frac{m}{m}\right]$.

Nie można tego jednak uważać za potwierdzenie teoryi, gdyż warunki owych doświadczeń wychodzą daleko poza granice założeń naszego rachunku. Wspominaliśmy bowiem, że $\varrho c a$ małem musi być w porównaniu do μ ($= 0{\cdot}00018$), ażeby ruch można uważać za „spokojny"; prędkości, jakich Kelvin używał, byłyby zatem dozwolone tylko w gazie bardzo rozrzedzonym.

---

[1]) Przybliżone obliczenie tego rodzaju bez uwzględnienia zmienności temperatury: O. E. Meyer, Crelle J. 75 (1873).

[2]) Patrz § 12, 5.

§ 30. Warunek „spokoju" ruchu stanowi zatem poważne ograniczenie praktycznej doniosłości tego rodzaju przykładów. O wiele ciekawsze byłyby ruchy „gwałtowne", w których ściśliwość i zjawiska cieplne także wiele ważniejszą odgrywają rolę.

Do takich ruchów, w których pominięcie wpływu bezwładności nie byłoby usprawiedliwione, możnaby zastosować metody przybliżenia dwojakiego rodzaju:

1) Zważając, że „caeteris paribus" ruch gazu lżejszego [t. j. o większym spółczynniku R] bardziej jest zbliżony do typu „spokojnego", można rozwinąć wszystkie zmienne w szeregi według potęg $\frac{1}{R}$. i obliczyć szereg przybliżeń podobnemi metodami jak w § 26, 28.

2) Rozwinięcie podobne, według potęg spółczynnika μ, określiłoby poprawki powstające wskutek lepkości, jeżeli się wychodzi z typu gazu idealnego.

Korzyść tych rozwinięć polega na tem, że system równań różniczkowych, powstających jest liniowy, ale komplikacya jednakowoż jest znacznie większa, aniżeli w przedtem omawianych przykładach. Do tego trzeba dodać, że w razie przekroczenia pewnych granic bezwładności (wskutek powiększenia gęstości lub prędkości) ruch staje się niestały i że powstają ruchy kłębiące się (mouvements turbulents).

Wspominaliśmy już o kilku przykładach tego rodzaju, jak o falach stojących w promieniu gazu lub tonach tarcia, które prawdopodobnie są źródłem głosu instrumentów dętych.

Do badania takich zjawisk trzebaby wynaleźć inne metody, któreby nie wymagały, jak tamte ciągłości funkcyj.

Nie zajmiemy się na tem miejscu szczegółowem rozwiązaniem takich zagadnień, w których lepkość i bezwładność trzeba uwzględnić; poprzestaniemy pod tym względem na teraz na ogólnych uwagach oddziałów poprzednich, zważywszy, że nawet w wiele prostszym przypadku — w hydrodynamice cieczy lepkich — ledwie rozpoczęto takie badania i tylko bardzo skromne dotychczas osiągnięto rezultaty.

Treść zeszytu IV.

Treść zeszytu V.

Treść zeszytu VI.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 2, Dział A.

Treść zeszytu I.

Treść zeszytu II.

Treść zeszytu III.

Treść zeszytu IV.

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności. Serya III. Tom 3, Dział A.

Rozprawy Wydziału mat.-przyrod. wychodzą od r. 1901 w dwóch działach: A. (nauki matematyczno-fizyczne), B. (nauki biologiczne).

Każdy dział będzie wychodzić w zeszytach, obejmujących o ile możności cały materyał posiedzenia miesięcznego Wydziału (których jest 10 do roku), w całych arkuszach druku z ciągłą paginacyą. Z końcem roku dołączona zostanie do ostatniego zeszytu każdego działu karta tytułowa i spis prac w tomie zawartych. Bez względu na możliwą ilość materyału, zawartego w tomie, ilość rycin lub tablic, cena tomu z działu A. wynosić będzie tylko 8 kor., a z działu B. 10 kor. rocznie — w Królestwie Polskiem dział A. 3 rs., a dział B. 4 rs. rocznie.

Skład główny; na Galicyę: — Księgarnia Spółki wydawniczej w Krakowie; na Królestwo Polskie: Księgarnia Gebethnera i Wolffa w Warszawie.